

Ковариационный анализ (Analysis of covariance – ANCOVA) на примере однофакторного ковариационного анализа (One-way ANCOVA)

Нохрин Д.Ю. (nokh для читателей форума forum.dissert.ru)

Ковариационный анализ – параметрический метод анализа данных, относящийся к классу общих линейных моделей (General Linear Models, GLM) с количественной зависимой переменной (откликом) и смесью независимых качественных переменных (факторов) и количественных переменных (ковариат). Сочетает дисперсионный и регрессионный подходы. Применяется, главным образом, для оценки действия факторов после снятия изменчивости, приносимой ковариатами. Также используется для увеличения точности оценок в регрессионном и дисперсионном анализах и для установления причинных связей, что достигается за счет получения скорректированных (согласованных, adjusted) оценок параметров регрессий и групповых средних.

Требования модели ковариационного анализа: (1) ошибки нормально распределены, (2) дисперсия ошибок однородна (ошибки гомоскедастичны), (3) зависимость отклика от количественных предикторов линейна, (4) линейные зависимости на разных уровнях факторов имеют одинаковый наклон.

Алгоритм проведения ковариационного анализа

Этап 1. Идентификация вида зависимости отклика от ковариаты

1. зависимость линейная → Этап 3
2. зависимость нелинейная → Этап 2

Этап 2. Спрямление нелинейных зависимостей

1. зависимость удаётся спрямить → Этап 3
2. зависимость не удаётся спрямить → Этап 8

Этап 3. Тест статистической значимости индивидуальных внутригрупповых регрессий и анализ ситуации

1. качественных различий в положении зависимостей нет → Этап 4
2. существуют качественные различия в положении регрессии → Этап 8

Этап 4. Тест статистической значимости общего наклона

1. общий наклон статистически значим → Этап 5
2. общий наклон статистически незначим → Вывод об отсутствии статистически значимого влияния ковариаты и исключение ее из рассмотрения в анализе → Дисперсионный анализ без ковариаты.

Этап 5. Тест однородности наклонов индивидуальных регрессий и расчёт согласованных параметров регрессий

1. наклоны однородны → расчёт согласованных параметров регрессий → Этап 6
2. наклоны неоднородны → Этап 8

Этап 6. Расчёт скорректированных на общий наклон внутригрупповых регрессий и оценка значимости межгрупповых различий по фактору при постоянном уровне ковариаты (тест на однородность свободных членов внутригрупповых регрессий)

1. свободные члены однородны → Вывод об отсутствии межгрупповых различий по фактору даже после корректировки на ковариату
2. свободные члены неоднородны → Расчёт согласованных групповых средних → Этап 7

Этап 7. Запланированные и незапланированные парные межгрупповые сравнения по фактору при постоянном уровне ковариаты → Вывод о структуре неоднородности свободных членов и обсуждение парных различий между градациями фактора при постоянном уровне ковариаты.

Этап 8. Дискретизация непрерывной ковариаты до качественного предиктора (фактора) с тремя или более градациями (например, «низкий уровень», «средний уровень» и «высокий уровень») → Дисперсионный анализ с фактором вместо ковариаты.

Материал и методы

Последовательность проведения и расчёты для случая однофакторного ковариационного анализа продемонстрированы на примере со стр. 41 книги Milliken и Johnson (2002). Последовательность проведения расчётов оптимизирована не для увеличения скорости вычислений, а для усвоения логики анализа в соответствии с алгоритмом (см. выше). Формулы по возможности упрощены. Основной блок расчётов выполнен по Sokal & Rohlf (1995). Графические построения выполнены в пакете KyPlot (v.2.15; Yoshioka, 2002).

Пример. Изучалась скорость растворения во рту шести типов шоколадных конфет: blue M&M[®], Button, chocolate chip, red M&M[®], small M&M[®] и Sno-Cap[®]. Для эксперимента в пластиковые пакеты помещался один из шести типов конфет, а также ириска (butterscotch chip), которая выступала в качестве стандарта. Для каждого типа конфет было подготовлено 8 таких пакетов. 35 человек случайным образом получали пакет и рассасывали сперва ириску, а затем конфету. Регистрировались скорости растворения сладостей в секундах. Поскольку можно было ожидать значительных индивидуальных различий между людьми по скорости потребления сладостей, скорость растворения стандартной ириски была использована в качестве ковариаты для уменьшения изменчивости при сравнении скоростей растворения шести типов шоколадных конфет. Т.о. в данном примере ковариационный анализ служил техникой для увеличения точности результатов дисперсионного анализа.

Таблица 1. Скорость растворения стандарта (X) и конфеты (Y) в секундах

Blue M&M		Button		Choc Chip		Red M&M		Small M&M		Sno-Cap	
1		2		3		4		5		6	
X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y	X	Y
28	60	27	53	17	36	20	30	30	25	15	20
30	45	16	47	29	51	35	45	32	25	21	29
19	38	19	39	20	40	16	32	30	33	16	23
33	48	35	90	14	34	19	47	22	26	40	44
19	34	34	65					32	30	19	26
24	42	40	58							21	29
25	48	28	72								
28	48	23	45								

Этап 1.

Идентификация вида зависимости отклика от ковариаты

Идентификация вида зависимости проводится визуально по диаграммам рассеяния (Scatterplot) отклика и количественного предиктора (ковариаты). Иногда нелинейность зависимости известна *a priori* из результатов предыдущих экспериментов, литературных данных или теоретических соображений. В случае контролируемых экспериментов с несколькими значениями отклика на каждом уровне предиктора возможна оценка статистической значимости отклонения зависимости от линейной. Это достигается путём разложения в ходе дисперсионного анализа общей дисперсии на: (1) дисперсию, объясняемую линейной регрессией, (2) дисперсию отклонений от линейной регрессии и (3) дисперсию остатков, которые выступают в качестве ошибки анализа.

Для данных примера визуальная оценка диаграммы рассеяния (см. рис. 1) не даёт веских оснований предполагать нелинейность отклика, а выполнить соответствующую статистическую проверку не позволяет тип исходных данных, когда для каждого случая X известно только одно единственное значение Y, а не несколько. Теоретически линейная зависимость также представляется логичной: чем выше скорость рассасывания ириски, тем

выше скорость рассасывания конфеты. Поэтому в нашем случае можно переходить непосредственно к Этапу 3, а Этап 2 рассмотрен в дидактических целях.

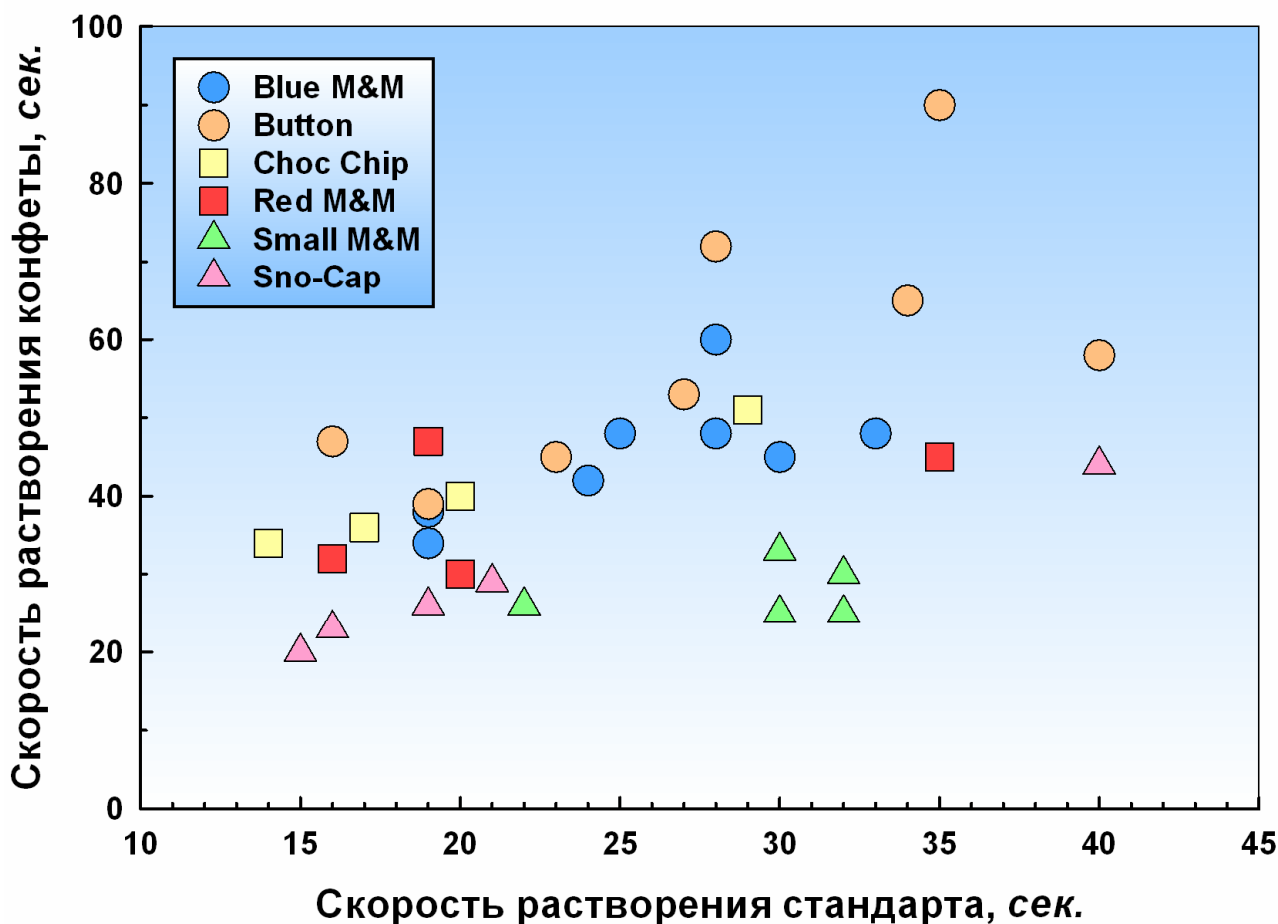


Рис.1. Диаграмма рассеяния для скоростей растворения конфет и стандарта.

Этап 2. Спрявление нелинейных зависимостей

Если на Этапе 1 был выявлен нелинейный характер зависимостей, для проведения ковариационного анализа их необходимо спрямить с помощью преобразований шкал Y и/или X , т.к. линейность ответа является одним из требований ANCOVA (см. выше).

2.1. Лучшим является преобразование, подобранное на основании глубоких знаний о рассматриваемом процессе, например, полученное из решения дифференциальных уравнений. При отсутствии теоретической модели явления можно использовать преобразование, применявшееся для таких признаков статистически грамотными и/или авторитетными в данной области исследователями. Также допустимо подобрать преобразование из числа наиболее распространённых зависимостей: показательной, степенной, обратной. Поскольку многие биологические признаки имеют распределения близкие к логарифмически нормальному, спрямить зависимости часто помогает логарифмирование только зависимой переменной y , реже – и зависимой y , и независимой x .

2.2. Если преобразование выбирается «вслепую», то для решения задачи спрямления нелинейных зависимостей наилучшим решением будет использовать модификацию преобразования Бокса-Кокса (Box-Cox transformation) для независимой переменной x . Данная модификация служит именно для спрямления кривых и потому обеспечит максимально возможную для наблюдаемых данных линейность. В ходе преобразования Бокса-Кокса итерационно подбирается параметр λ (лямбда), обеспечивающий в данном(!) случае

максимальную линейность отклика, и далее рассчитываются преобразованные значения

предиктора x' согласно системе:
$$x' = \begin{cases} \frac{x^\lambda - 1}{\lambda}, & \lambda \neq 0 \\ \ln x, & \lambda = 0 \end{cases}$$

В зависимости от величины параметра λ преобразование Бокса-Кокса включает в качестве частных случаев большинство известных преобразований, а также все промежуточные между ними по силе преобразования:

Значение λ	Значение x'
-2	прямо пропорционально $1/x^2$
-1	прямо пропорционально $1/x$
-0,5	прямо пропорционально $1/\sqrt{x}$
0	равно $\ln x$
0,5	прямо пропорционально \sqrt{x}
1	прямо пропорционально x
2	прямо пропорционально x^2

Если использовать преобразованное по Боксу-Коксу значение предиктора x по каким-либо причинам нежелательно, то можно, отталкиваясь от значения λ , подобрать преобразование шкалы из числа широко распространённых. Например, при $\lambda=0,12$ – можно вместо x использовать $\ln x$, при $\lambda=0,45$ – использовать \sqrt{x} , при $\lambda=0,25$ – использовать $0,5 \cdot (\ln x + \sqrt{x})$ и т.п. Значение параметра λ близкое к 1 указывает на то, что зависимость и так близка к прямой и не нуждается в спрямлении.

Алгоритм работы в программе Rundo Box-Cox

- Запустить программу и ввести следующие настройки:
 - no. of samples = 2
 - start value и end value – по умолчанию (может потребоваться увеличить, если лямбда окажется равна граничному значению)
 - step value = 0,01 (или для большей точности 0,001)
 - transformed data to var = 3
 - round transformed data to 0,01 (или для большей точности 0,001)
 - галочка в окне show graph позволит увидеть результат работы алгоритма по поиску максимума функции максимального правдоподобия.
 - выбрать в качестве цели анализа (the aim): linearity ...
- В подготовленной таблице данных (в Excel, Calc, Word и т.д.) выделить область значений для предиктора X и скопировать в буфер обмена.
- В программе: Edit – Paste one column of data from clipboard. Вести 1. Paste.
- В подготовленной таблице данных выделить область значений для отклика Y и скопировать в буфер.
- В программе: Edit – Paste one column of data from clipboard. Вести 2. Paste.
- Run. Выписать значение параметра λ (Lambda).
- Если нужно – скопировать преобразованные данные в буфер обмена: Edit – Copy one column of data to clipboard. Ввести 3. Затем вставить преобразованные значения из буфера в нужную программу.
- Очистить область данных в программе перед вводом или вставкой из буфера новых данных: Table – Clear.

Следует иметь в виду, что преобразование должно быть единым для всего массива данных, т.е. по возможности максимально спрямлять одновременно все зависимости. Если для одних зависимостей лучше подходит одно преобразование (на основании оценки параметра λ), а для других – другое, то ситуация анализируется на предмет возможных принципиальных качественных отличий в форме зависимостей. Если качественные отличия вполне закономерны или допустимы исходя из природы данных, то следует ограничиться расчётом параметров нелинейных зависимостей, а их сравнение провести в ходе дисперсионного анализа на Этапе 8, где различия в форме зависимостей проявятся в виде соответствующего взаимодействия факторов. Аналогично следует поступить и в случае неудачной попытки спрямления зависимости в силу её сложной формы (2 и более изгибов).

Если для зависимостей подходят разные преобразования (на основании оценки параметра λ), однако нет оснований предполагать наличие качественных различий в форме кривых – выбирается промежуточный по силе вариант преобразования.

На момент написания данного материала мне известны только две программы (обе одного автора), выполняющие требуемую модификацию преобразования Бокса-Кокса: Runderm Pro и Runderm Box-Cox, которая с недавних пор включена в состав Runderm Pro (<http://pjadw.tripod.com/>). Алгоритм работы в программе приведён выше.

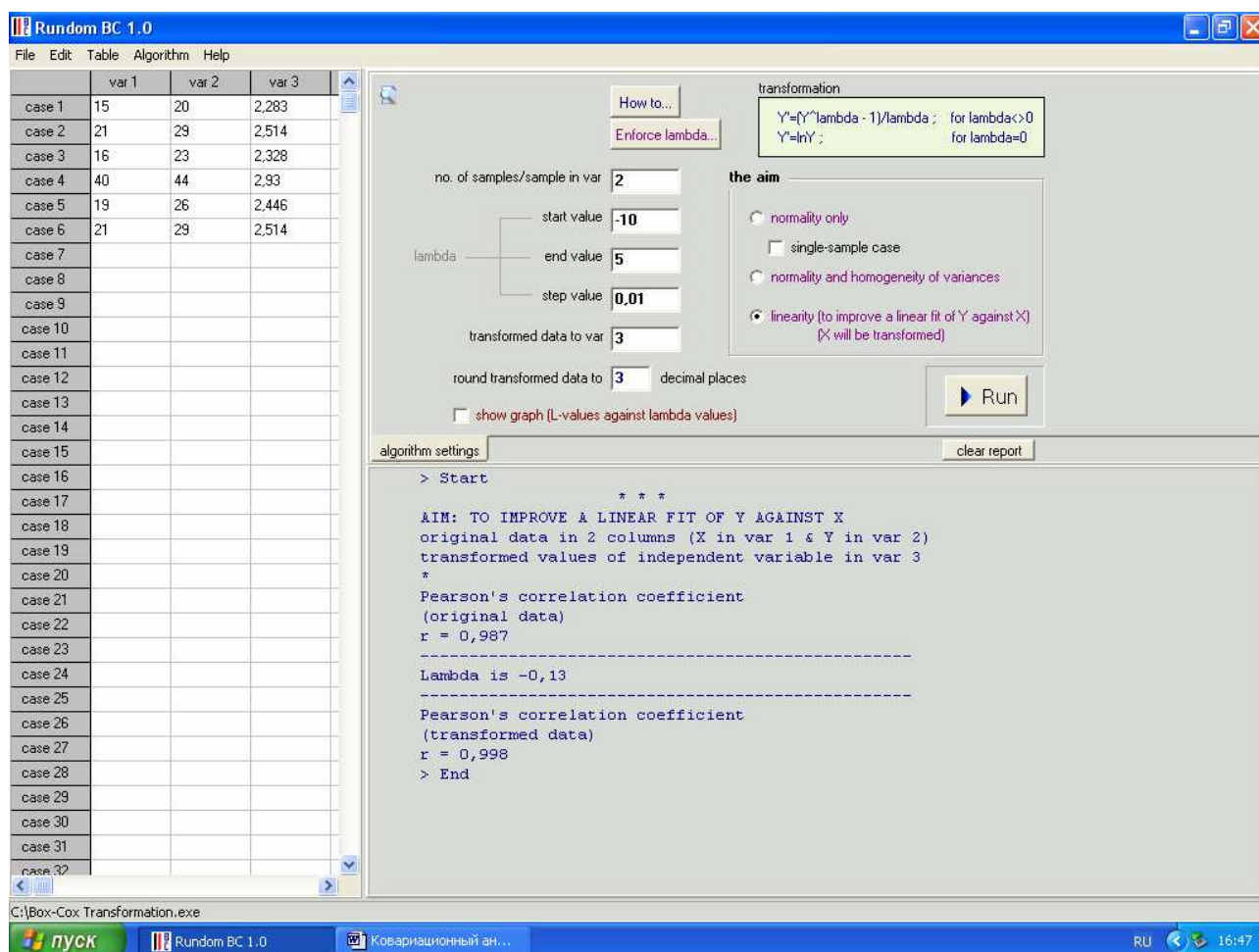


Рис. 2. Скриншот программы Runderm Box-Cox после обработки данных из примера для последнего типа конфет – Sno-Cap.

Для шести регрессий нашего примера значения параметра λ , рассчитанные в программе Runderm Box-Cox, составили соответственно: -5,12; -0,21; 1,7; -2,13; -9,88 и -0,13. Предполагать качественную природу различий в форме кривых оснований нет. Поэтому, учитывая что объёмы выборок заметно различались, определим итоговую λ путём взвешивания частных λ на объёмы выборок:

$$\bar{\lambda}_{\text{взвешенная}} = \frac{(-5,12) \cdot 8 + (-0,21) \cdot 8 + 1,7 \cdot 4 + (-2,13) \cdot 4 + (-9,88) \cdot 5 + (-0,13) \cdot 6}{35} = -2,70.$$

Таким образом, в качестве лучшего преобразования для спрямления всех шести зависимостей примера можно использовать величину, обратную примерно кубическому корню из x : $x' = \frac{1}{x^{-2,70}} = \frac{1}{2,7\sqrt{x}}$ или более точно по формуле Бокса-Кокса: $x' = \frac{x^{-2,7} - 1}{(-2,7)}$.

Этап 3.

Тест статистической значимости внутригрупповых регрессий

Расчёты показаны на примере зависимости скорости растворения конфеты от скорости растворения стандарта для третьего варианта эксперимента: Choc Chip.

Choc Chip	
x	y
17	36
29	51
20	40
14	34

3.1. Расчёт параметров линейной регрессии

$$n = 4; \sum x_i = 80; \sum y_i = 161; \sum x_i^2 = 1726; \sum y_i^2 = 6653; \bar{x} = 20; \bar{y} = 40,25; \\ \sum x_i y_i = 17 \cdot 36 + 29 \cdot 51 + 20 \cdot 40 + 14 \cdot 34 = 3367.$$

- SS – сумма квадратов отклонений от среднего (Sum of Squares)

При делении суммы квадратов на число степеней свободы получается дисперсия.

$$SS_X = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 1726 - \frac{80^2}{4} = 126;$$

$$SS_Y = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 6653 - \frac{161^2}{4} = 172,75.$$

- SP – сумма произведений отклонений от среднего (Sum of Products)

При делении суммы произведений на число степеней свободы получается ковариация.

$$SP_{XY} = \sum (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = \sum x_i y_i - \frac{\sum x_i \sum y_i}{n} = 3367 - \frac{80 \cdot 161}{4} = 147.$$

Внимание. Для дальнейших расчётов на Этапе 4 понадобятся значения SP_{XY} . Если расчёт выполняется в пакете, содержащем в отчёте ковариационную матрицу (Covariance Matrix), то её можно восстановить умножением ковариации XY на число степеней свободы $df = n - 1$.

- $b_{Y \cdot X}$ – коэффициент регрессии (читается «бэ игрек по икс»)

– параметр линейной регрессии. Коэффициент регрессии является показателем силы наклона регрессии и численно равен тангенсу угла наклона линии регрессии к оси X .

$$b_{Y \cdot X} = \frac{SP_{XY}}{SS_X} = \frac{147}{126} = 1,166666667.$$

- a – свободный член линейной регрессии (Intercept)

– параметр линейной регрессии. Свободный член является показателем высоты положения линии регрессии относительно оси X и равен ординате оси Y в точке её пересечения с линией регрессии.

$$a = \bar{y} - b_{Y \cdot X} \cdot \bar{x} = 40,25 - 1,166666667 \cdot 20 = 16,91666666.$$

Вывод 3.1. Зависимость времени растворения конфет «Choc Chip» от времени растворения стандарта описывается линейной регрессией вида: $\hat{y}_i = 16,91666666 + 1,166666667x_i$.

Аналогичные вычисления делаются для всех индивидуальных регрессий, и результаты заносятся в таблицу 2.

Таблица 2. Параметры внутригрупповых линейных зависимостей вида $\hat{y}_i = a + bx_i$

Тип конфет	Свободный член a	Коэффициент регрессии b
Blue M&M	17,97435897	1,064102564
Button	21,57194995	1,335245047
Choc Chip	16,91666667	1,166666667
Red M&M	26,57603687	0,529953917
Small M&M	22,19767442	0,191860465
Sno-Cap	8,7	0,9

3.2. Оценка значимости регрессии в ходе дисперсионного анализа

- $SS_{регp}$ – объяснённая линейной регрессией сумма квадратов отклонений

$$SS_{регp} = \sum (\hat{y}_i - \bar{y})^2 = \frac{SP_{XY}^2}{SS_X} = \frac{147^2}{126} = 171,5.$$

- $SS_{ост}$ – необъяснённая сумма квадратов или сумма квадратов остатков (ошибки)

$$SS_{ост} = \sum (y_i - \hat{y}_i)^2 = SS_Y - SS_{регp} = 172,75 - 171,5 = 1,25$$

Полученные значения заносятся в таблицу результатов дисперсионного анализа и оценивается значимость линейной регрессии по отношению к ошибке.

Таблица 3. Форма представления результатов дисперсионного анализа линейной регрессии

Источник изменчивости	Сумма квадратов SS	Степени свободы df	Средний квадрат MS	F -критерий	P
Линейная регрессия	$SS_{регp}$	1	$MS_{регp} = \frac{SS_{регp}}{1}$	$\frac{MS_{регp}}{MS_{ост}}$	По верхним доверит. границам F -распределения с $df_1=1$; $df_2=n-2$
Остатки (ошибка)	$SS_{ост}$	$n-2$	$MS_{ост} = \frac{SS_{ост}}{n-2}$		
Общая	SS_Y	$n-1$			

Результаты такого анализа для «Choc Chip» приведены в пункте 3 таблицы 3.

Вывод 3.2. Зависимость времени растворения конфет «Choc Chip» от времени растворения стандарта высоко статистически значима: $F_{[1; 2]}=274,4$; $P=0,00362$.

3.3. Обобщение расчётов по этапу 2.

Аналогичные вычисления делаются для всех индивидуальных регрессий и результаты заносятся в результирующую таблицу 4.

Таблица 4. Результаты дисперсионного анализа для индивидуальных регрессий.

Источник изменчивости	Сумма квадратов <i>SS</i>	Степени свободы <i>df</i>	Средний квадрат <i>MS</i>	<i>F</i> -критерий	<i>P</i>
1. Blue M&M					
Регрессия	198,7211538	1	198,7212	5,158153	0,06356667
Остатки	231,1538462	6	38,52564		
Общая	429,875	7			
2. Button					
Регрессия	854,8906413	1	854,8906	4,718875	0,07283082
Остатки	1086,984359	6	181,1641		
Общая	1941,875	7			
3. Choc Chip					
Регрессия	171,5	1	171,5	274,4	0,00362451
Остатки	1,25	2	0,625		
Общая	172,75	3			
4. Red M&M					
Регрессия	60,94470046	1	60,9447	0,725293	0,48411817
Остатки	168,0552995	2	84,02765		
Общая	229	3			
5. Small M&M					
Регрессия	2,53255814	1	2,532558	0,157408	0,71809247
Остатки	48,26744186	3	16,08915		
Общая	50,8	4			
6. Sno-Cap					
Регрессия	340,2	1	340,2	146,3226	0,00026791
Остатки	9,3	4	2,325		
Общая	349,5	5			

Вывод 3.3. В ходе проверки внутригрупповых зависимостей времени растворения конфет шести типов от времени растворения стандарта в двух случаях была обнаружена высоко статистически значимая регрессия (для Choc Chip и Sno-Cap $P < 0,01$), в двух случаях наблюдалась тенденция к зависимости (для Blue M&M и Button $0,05 < P \leq 0,10$) и также в двух случаях регрессия была незначимой (для Red M&M и Small M&M $P > 0,40$).

По результатам расчётов на Этапе 3 возможны следующие три исхода: (1) все внутригрупповые регрессии статистически значимы, (2) не все внутригрупповые регрессии статистически значимы и (3) все внутригрупповые регрессии статистически незначимы. Независимо от исхода следующим этапом будет Этап 4. Однако перед его проведением необходимо проанализировать ситуацию и убедиться, что отсутствуют качественные различия в положении зависимостей. Маловероятно, но нельзя исключить крайнюю ситуацию, когда зависимости имеют одинаковую форму (после спрямления на Этапе 2 это – прямая линия), но разный знак. В таком случае необходимо принять решение о включении этого варианта в общий расчёт или об уходе на Этап 8, где такое различие проявится крайним вариантом взаимодействия факторов – взаимодействием со сменой рангов. Ясно,

что если выпадающая из общей закономерности регрессия была статистически значимой – её нужно исключать из ковариационного анализа. Если же она была незначимой выбор остаётся за исследователем, который при принятии решения руководствуется также знаниями в предметной области.

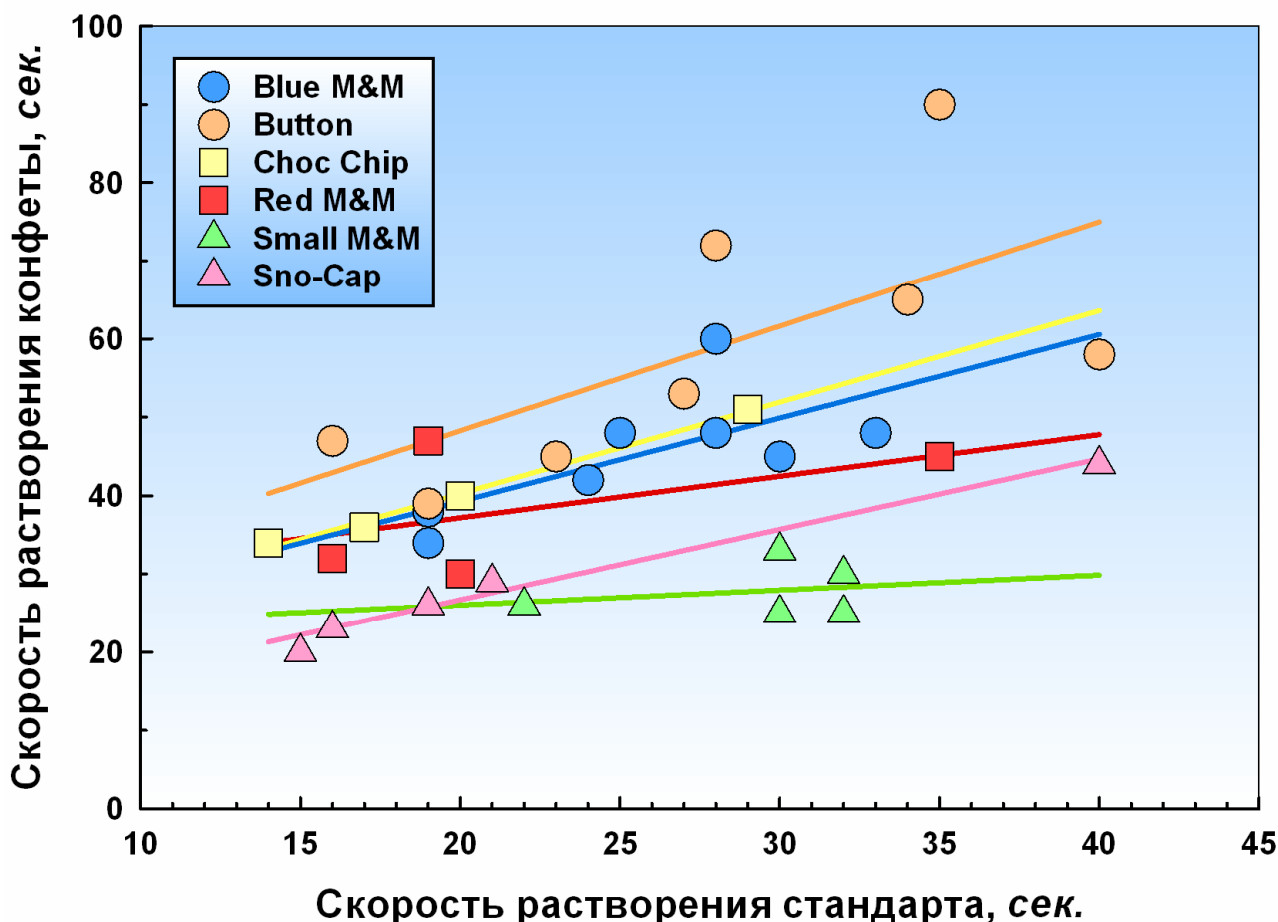


Рис. 3. Индивидуальные внутригрупповые зависимости скорости растворения конфет шести типов от скорости растворения стандарта.

В нашем примере не все зависимости были статистически значимыми, однако анализ рисунка 3 не даёт оснований предполагать наличие качественных различий. Возможно, по результатам проверки равенства наклонов на этапе 5, окажется, что какие-то зависимости имели значимо больший наклон, какие-то меньший, однако сама характеристика «больше-меньше» уже говорит о количественной природе этих различий.

Этап 4. Тест статистической значимости общего наклона

Из промежуточных и конечных результатов вычислений по Этапу 3 заполняется таблица 5. Если расчёт выполняется в пакете, то SS_X и SS_Y можно взять из результатов описательной статистики как дисперсии x и y , $SS_{ост}$ – из результатов регрессионного анализа, SP_{XY} – получить умножением ковариации XY (из ковариационной матрицы – Covariance Matrix – результатов регрессионного анализа) на число степеней свободы $df = n - 1$.

Таблица 5. Суммирование показателей с получением внутригрупповых оценок SS_Y , SS_X , SP_{XY} .

Показатель	Blue M&M	Button	Choc Chip	Red M&M	Small M&M	Sno-Cap	Сумма
n	8	8	4	4	5	6	35
SS_X	175,5	479,5	126,0	217,0	68,8	420,0	1486,8
SS_Y	429,875	1941,875	172,75	229,0	50,8	349,5	3173,8
SP_{XY}	186,75	640,25	147,0	115,0	13,2	378,0	1480,2
$SS_{ост}$	231,1538462	1086,984359	1,25	168,0552995	48,26744186	9,3	1545,010947

Введём для упрощения формул новые обозначения:

$$SS_{x \text{ внутри}} = \sum SS_X = 1486,8;$$

$$SP_{\text{внутри}} = \sum SP_{XY} = 1480,2.$$

$SS_{\text{общая}} = \sum SS_Y = 3173,8$. Имеет число степеней свободы $df = \sum n_i - k$, где k – количество групп (регрессий), т.е. $df = 35 - 6 = 29$.

Тогда:

- Объединённый коэффициент регрессии внутри групп.

$$b_{\text{внутри}} = \frac{SP_{\text{внутри}}}{SS_{x \text{ внутри}}} = \frac{1480,2}{1486,8} = 0,995560936.$$

- $SS_{\text{регр внутри}}$ – объяснённая линейной регрессией внутри групп сумма квадратов..

$$SS_{\text{регр внутри}} = \frac{SP_{\text{внутри}}^2}{SS_{x \text{ внутри}}} = \frac{1480,2^2}{1486,8} = 1473,629298. \text{ Имеет одну степень свободы.}$$

- $SS_{\text{ост общего наклона}}$ – необъяснённая общей линейной регрессией сумма квадратов.

$$SS_{\text{ост общего наклона}} = SS_{\text{общая}} - SS_{\text{регр внутри}} = 3173,8 - 1473,629298 = 1700,170702.$$

Имеет число степеней свободы $df = \sum n_i - k - 1$, т.е. $df = 35 - 6 - 1 = 28$.

Полученные оценки сводятся в таблицу результатов дисперсионного анализа, для SS рассчитываются соответствующие MS и проверяется нулевая гипотеза об отсутствии общего наклона внутри групп.

Таблица 6. Результаты дисперсионного анализа для Этапа 4.

Источник изменчивости	Сумма квадратов SS	Степени свободы df	Средний квадрат MS	F -критерий	P
Регрессия	1473,629298	1	1473,629298	24,26910445	0,000034
Остатки (ошибка общего наклона)	1700,170702	28	60,72038221		
Общая	3173,8	29			

Вывод по Этапу 4. Объединённая внутригрупповая регрессия с коэффициентом регрессии $b_{Y \cdot X \text{ общий}} = 0,995560936$ высоко статистически значима: $F_{[1;28]}=24,269$; $P=0,00003$.

Ввиду значимости общего наклона далее на Этапе 5 следует определить насколько случайны наблюдаемые отклонения индивидуальных внутригрупповых регрессий от общего наклона. Но если бы общий наклон был незначим – смысла в такой проверке уже бы не было

и тогда следовало бы признать отсутствие влияния ковариаты на признак и исключить её из рассмотрения в анализе.

Этап 5. Тест однородности наклонов индивидуальных регрессий и расчёт согласованных параметров регрессий

5.1. Тест однородности наклонов

- $SS_{ост\ внутри}$ – необъяснённая сумма квадратов отклонений внутригрупповых значений от их индивидуальных регрессий. Удобно рассчитать на этапе 4 (см. таблицу 5) как сумму квадратов остатков:

$$SS_{ост\ внутри} = \sum SS_{ост} = 1545,010947.$$

Имеет число степеней свободы $df = \sum n_i - 2k$, т.е. $df = 35 - 2 \cdot 6 = 23$.

- $SS_{между\ наклонами}$ – сумма квадратов отклонений внутригрупповых регрессий от общего наклона.

$$SS_{между\ наклонами} = SS_{ост\ общего\ наклона} - SS_{ост\ внутри} = 1700,170702 - 1545,010947 = 155,159755.$$

Имеет число степеней свободы $df = k - 1$, т.е. $df = 6 - 1 = 5$.

Т.о. ошибка общего наклона разбивается на 2 части: изменчивость между наклонами и изменчивость внутри наклонов. Полученные оценки сводятся в таблицу результатов дисперсионного анализа, для SS рассчитываются соответствующие MS и проверяется нулевая гипотеза об отсутствии различий между наклонами (коэффициентами регрессий) внутригрупповых регрессий.

Таблица 6. Результаты дисперсионного анализа для Этапа 5.

Источник изменчивости	Сумма квадратов SS	Степени свободы df	Средний квадрат MS	F -критерий	P
Между b	155,159755	5	31,031951	0,461961045	0,800371
Внутри b	1545,010947	23	67,174389		
Общая (ошибка общего наклона)	1700,170702				

Вывод 5.1. Отклонение внутригрупповых коэффициентов регрессий от общего коэффициента регрессии $b_{Y.X\ обций} = 0,995560936$ статистически незначимо: $F_{[5;23]}=0,462$; $P=0,80037$.

Поскольку отклонения от общего наклона оказались незначимыми, мы имеем все основания рассматривать общий коэффициент регрессии в качестве уточнённого (adjusted) значения для всех шести регрессий и переходить к Этапу 6. Однако если бы в ходе проверки была выявлена статистически значимая неоднородность наклонов, это указало бы на существование взаимодействия между фактором и ковариатой и сделало бы сравнение групповых средних по фактору если не невозможным, то по крайней мере крайне затруднительным (известны попытки сравнения свободных членов непараллельных регрессий в диапазоне варьирования ковариаты). А потому проще было бы перейти на этап 8 и выразить такое взаимодействие в ходе дисперсионного анализа, чтобы оно не препятствовало сравнению средних.

5.2. Расчёт согласованных параметров регрессий

Заполняется таблица средних значений показателей (табл. 7.), рассчитываются и заносятся в неё согласованные оценки свободного члена скорректированных на общий наклон индивидуальных регрессий:

- $a_{k \text{ соглас}} = \bar{y}_k - b_{Y \cdot X \text{ общий}} \cdot \bar{x}_k$.

Например, $a_{1 \text{ соглас}} = 45,375 - 0,995560936 \cdot 25,75 = 19,7393059$.

Тогда согласованное уравнение регрессии для первого типа конфет (Blue M&M) будет:

$$\hat{y}_{i1} = 19,7393059 + 0,995560936 x_{i1}.$$

Аналогичные вычисления делаются для всех зависимостей и конечный результат можно изобразить в виде графика согласованных зависимостей (рис. 4).

Таблица 7. Средние показатели

Показатель	Blue M&M	Button	Choc Chip	Red M&M	Small M&M	Sno-Cap	Общее среднее
n	8	8	4	4	5	6	
\bar{x}_k	25,75	27,75	20	22,5	29,2	22	$\bar{\bar{x}} = 25,02857143$
\bar{y}_k	45,375	58,625	40,25	38,5	27,8	28,5	$\bar{\bar{y}} = 41,62857143$
$a_{k \text{ соглас}}$	19,7393059	30,9981840	20,3387813	16,0998789	-1,2703793	6,59765941	

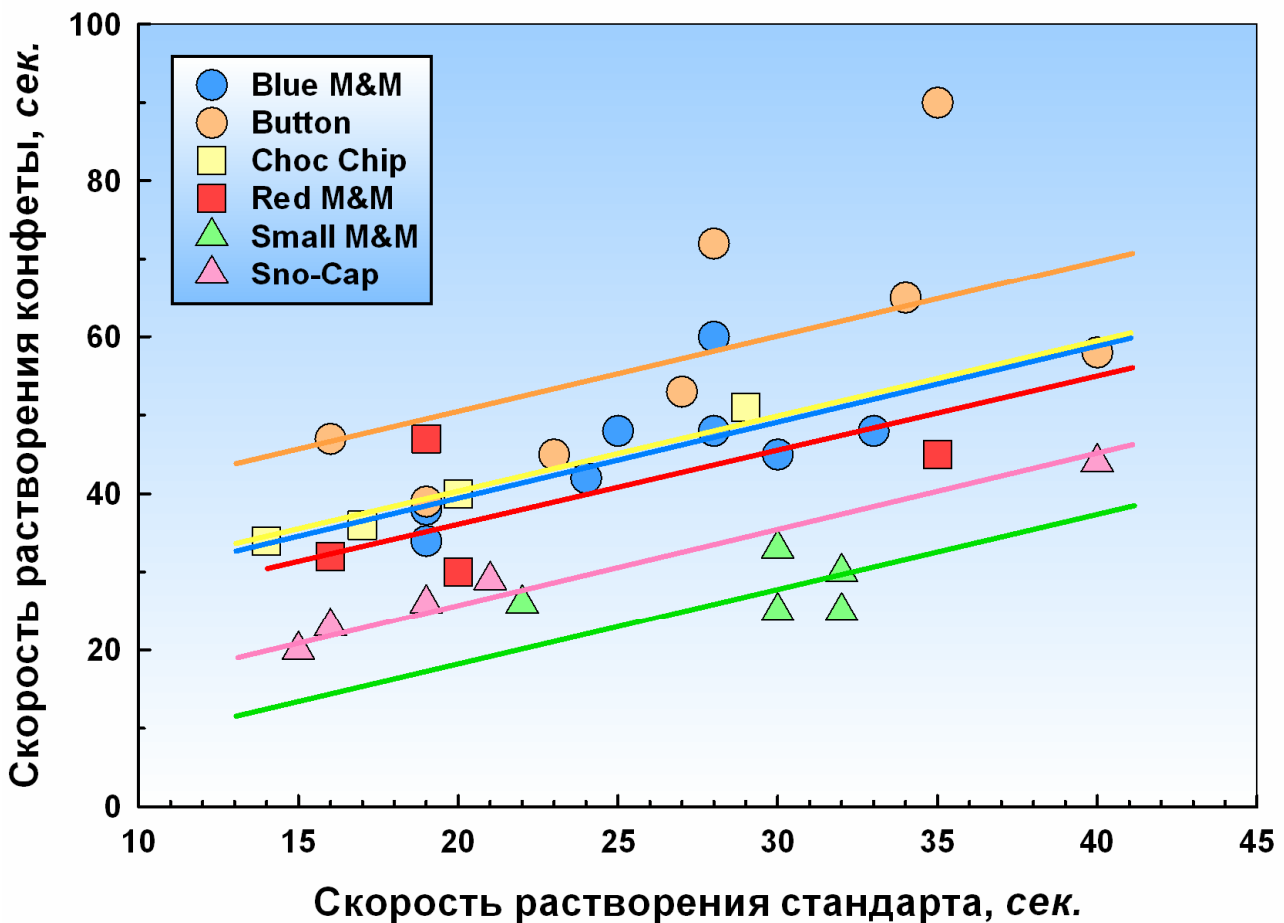


Рис. 4. Зависимости скорости растворения конфет шести типов от скорости растворения стандарта, согласованные на общий коэффициент регрессии.

Этап 6.
Оценка значимости межгрупповых различий по фактору
при постоянном уровне ковариаты

6.1. Предварительные расчёты

На этом этапе понадобятся суммы квадратов отклонений групповых средних \bar{x}_k и \bar{y}_k от соответствующих общих для всего набора данных средних \bar{x} и \bar{y} . Их можно рассчитать по формулам пользуясь данными таблицы средних значений их предыдущего этапа (Табл.7) либо взять из результатов однофакторного дисперсионного анализа для межгрупповых различий по x и по y как $SS_{\text{между группами}}$. Поскольку результаты дисперсионного анализа отклика без учёта ковариаты будут полезны для демонстрации полного разложения изменчивости в ходе ковариационного анализа, он представлен в таблице 8.

$$SS_{X \text{ между группами}} = \sum n_k (\bar{x}_k - \bar{x})^2 = 8 \cdot (25,75 - 25,02857)^2 + \dots + 6 \cdot (22 - 25,02857)^2 = 332,1714286.$$

$$SS_{Y \text{ между группами}} = \sum n_k (\bar{y}_k - \bar{y})^2 = 8 \cdot (45,375 - 41,62857)^2 + \dots + 6 \cdot (28,5 - 41,62857)^2 = 4460,371429.$$

Таблица 8. Результаты дисперсионного анализа линейной регрессии без учёта групп

Источник изменчивости	Сумма квадратов SS	Степени свободы df	Средний квадрат MS	F -критерий	P
Между группами	4460,371429	5	892,0742857	8,151160844	0,0000668
Внутри групп	3173,8	29	109,4413793		
Общая	7634,171429	34			

Далее рассчитывается сумма произведений отклонений для всего набора данных без деления на группы (типы конфет). Вычисления аналогичны пункту 3.1. и проводятся по аналогичным формулам, но для всего массива. Также ее можно восстановить умножением ковариации XY из результатов регрессионного анализа на число степеней свободы $df = n - 1$.

- $SP_{\text{общая}} = \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^{n_k} (x_i - \bar{x})(y_i - \bar{y}) = 1881,3713.$

- $SP_{\text{внутри}}$ была получена на этапе 4 в таблице 5 как $SP_{\text{внутри}} = \sum SP_{XY} = 1480,2.$

Тогда $SP_{\text{между}}$ рассчитывается как разность SP общей и внутригрупповой или по прямой

формуле: $SP_{\text{между}} = \sum_{k=1}^K n_k (\bar{x}_k - \bar{x})(\bar{y}_k - \bar{y}).$

- $SP_{\text{между}} = SP_{\text{общая}} - SP_{\text{внутри}} = 1881,3713 - 1480,2 = 401,1713.$

Далее рассчитываются суммы квадратов отклонений x и y от общих по всему массиву данных средних \bar{x} и \bar{y} :

- $SS_{X \text{ общая}} = \sum (x_i - \bar{x})^2 = \sum x_i^2 - \frac{(\sum x_i)^2}{n} = 23744 - \frac{876^2}{35} = 1818,971429;$

- $SS_{Y \text{ общая}} = \sum (y_i - \bar{y})^2 = \sum y_i^2 - \frac{(\sum y_i)^2}{n} = 68287 - \frac{1457^2}{35} = 7634,171429.$

Тогда общая необъяснённая сумма квадратов будет:

$$\bullet SS_{ост\ общая} = SS_{Y\ общая} - \frac{(SP_{общая})^2}{SS_{X\ общая}} = 7634,171429 - \frac{1881,3713^2}{1818,971429} = 5688,259629,$$

а необъяснённая сумма квадратов для межгрупповых различий:

$$\bullet SS_{ост\ между} = SS_{Y\ между\ группами} - \frac{(SP_{между})^2}{SS_{X\ между}} = 4460,371429 - \frac{401,1713^2}{332,1714286} = 3975,86735.$$

Она имеет число степеней свободы $df = k - 2$, т.е. $df = 6 - 2 = 4$.

6.2. Тест значимости межгрупповых различий после корректировки на ковариату

Необъяснённая сумма квадратов после коррекции на общий наклон:

$$SS_{ост\ общая\ соглас} = SS_{ост\ общая} - SS_{ост\ общего\ наклона} = 5688,259629 - 1700,170702 = 3988,088927.$$

($SS_{ост\ общая}$ берётся из пункта 6.1, а $SS_{ост\ общего\ наклона}$ - из Этапа 4.). Она имеет число степеней свободы $df = k - 1$, т.е. $df = 6 - 1 = 5$. Ошибкой для неё выступают отклонения от общего наклона, рассчитанные на этапе 4 (Табл. 6).

Результаты вычислений заносятся в итоговую таблицу результатов ковариационного анализа.

Таблица 9. Результаты ковариационного анализа

Источник изменчивости	Сумма квадратов SS	Степени свободы df	Средний квадрат MS	F -критерий	P
Между группами после согласования на общий наклон	3988,088927	5	797,6177854	13,131359151	0,000001
Отклонения от общего наклона (ошибка)	1700,170702	28	60,72038221		
Общая	5688,259629				

Вывод по этапу 6. Различия в скоростях растворения во рту конфет после коррекции на индивидуальные особенности потребления сладостей высоко статистически значимы: $F_{[5;28]}=13,131$; $P<0,00001$.

Таким образом, в ходе ковариационного анализа мы сперва убедились в однородности наклонов, а затем скорректировали частные наклоны на общий наклон $b_{Y \cdot X\ общий}$. В результате были получены новые, согласованные оценки параметров частных регрессий, которые затем были использованы для проверки равенства новых, согласованных оценок межгрупповых средних $\bar{y}_k\ соглас$. При этом, если для частных регрессий имелись также межгрупповые различия в средних значениях предиктора \bar{x}_k , то после коррекции на общий наклон в качестве абсциссы для сравнения $\bar{y}_k\ соглас$ выступило общее для всего комплекса среднее значение $\bar{\bar{x}}$. Тем не менее, мы можем сравнить скорректированные значения $\bar{y}_k\ соглас$ в любой точке оси X – они везде будут одинаковы, ввиду параллельности частных линейных регрессий. Если продолжить их до пересечения с ординатой Y , выходящей из

начала координат (x_0), то они отсекут на ней отрезки, соответствующие свободным членам частных регрессий $a_{k \text{ соглас}}$, скорректированным на общий наклон (см. табл. 7). Поэтому тест значимости межгрупповых различий после корректировки на ковариату эквивалентен проверке однородности согласованных оценок свободных членов. Преимущество же использования в качестве реперной точки абсциссы $\bar{\bar{x}}$, а не x_0 заключается в том, что в центре системы ошибки $\bar{y}_{k \text{ соглас}}$ будут минимальны, т.к. ошибка всегда нарастает от центра системы к периферии (этот закон работает не только в статистическом анализе, но и в обыденной жизни: укладка кафеля, глухой телефон, исполнение законов на местах и т.д.).

6.3. Расчёт согласованных групповых средних и их стандартных ошибок

Проводится по данным таблицы 7 пункта 5.2. Для удобства продублирую её здесь.

Показатель	Blue M&M	Button	Choc Chip	Red M&M	Small M&M	Sno-Cap	Общее среднее
n	8	8	4	4	5	6	
\bar{x}_k	25,75	27,75	20	22,5	29,2	22	$\bar{\bar{x}} = 25,02857143$
\bar{y}_k	45,375	58,625	40,25	38,5	27,8	28,5	$\bar{\bar{y}} = 41,62857143$
$a_{k \text{ соглас}}$	19,7393059	30,9981840	20,3387813	16,0998789	-1,2703793	6,59765941	

- $\bar{y}_{k \text{ соглас}} = \bar{y}_k - b_{Y \cdot X \text{ общий}} (\bar{x}_k - \bar{\bar{x}})$, например, для первого типа конфет Blue M&M:

$$\bar{y}_{1 \text{ соглас}} = 45,375 - 0,995560936(25,75 - 25,02857143) = 44,65677390$$

- $s_{\bar{y}_{k \text{ соглас}}} = \sqrt{MS_{\text{ост общего наклона}} \cdot \left(\frac{1}{n_k} + \frac{(\bar{x}_k - \bar{\bar{x}})^2}{SS_{X \text{ внутри}}} \right)}$, например для Blue M&M:

$$s_{\bar{y}_{1 \text{ соглас}}} = \sqrt{60,72038221 \cdot \left(\frac{1}{8} + \frac{(25,75 - 25,02857143)^2}{1486,8} \right)} = \sqrt{7,611303128} = 2,75885903.$$

(значение $MS_{\text{ост общего наклона}}$ было получено в табл. 9 пункта 6.2, $SS_{X \text{ внутри}}$ - на этапе 4).

Таблица 10. Согласованные оценки скорости растворения конфет шести типов

Тип конфет	Среднее	Стандартная ошибка
Blue M&M	44,65677390	2,75885903
Button	55,91565202	2,80936172
Choc Chip	45,25624928	4,02651070
Red M&M	41,01734694	3,92953062
Small M&M	23,64708867	3,58534790
Sno-Cap	31,51512741	3,23954548

Полученные согласованные оценки средних и ст. ошибки нужно округлить. Для этого можно воспользоваться следующим эмпирическим правилом: (1) разделить ст. ошибку на 3 и определить место после запятой первой значащей цифры (неравной нулю); (2) с такой точностью округлить среднее, а ст. ошибку привести на знак точнее (Sokal & Rohlf, 1995).

Например для Blue M&M: $2,75885903/3=0,919619676$. Первая цифра после запятой (выделена жирным шрифтом) занимает место десятых – округляем среднее до десятых, а ст. ошибку – до сотых. Имеем: $44,7 \pm 2,78$. Для других типов конфет округления можно сделать с той же точностью, чтобы результаты выглядели единообразно.

6.4. Полное разложение изменчивости в ходе ковариационного анализа

Таблица 11. Полное разложение изменчивости (сумм квадратов отклонений) в ходе ковариационного анализа

Источник изменчивости	Сумма квадратов SS	Степени свободы df	Средний квадрат MS	F-критерий
Между	4460,371429	5	892,0742858	8,151*
- линейная регрессия	484,504079	1	484,504079	0,487 (ns)
- отклонения от регрессии	3975,86735	4	993,9668375	
Внутри	3173,8	29	109,4413793	
- общий наклон внутри групп	1473,629298	1	1473,629298	24,269*
- отклонения от него, в т.ч.	1700,170702	28	60,72038221	
- различия между отдельными наклонами	155,159755	5	31,031951	0,462 (ns)
- отклонения группы от своего наклона	1545,010947	23	67,174389	
Общая (Между + Внутри)	7634,171429	34		
- общий наклон внутри комплекса	1945,9118	1	1945,9118	
- отклонения от него, в т.ч.	5688,259629	33	172,3715039	
- между свободными членами	3988,088927	5	797,6177854	13,131*
- отклонения от общего наклона внутри групп	1700,170702	28	60,72038221	

Примечание. ns – эффект незначим, * эффект значим $P < 0,0001$.

Этап 7.

Запланированные и незапланированные парные межгрупповые сравнения по фактору при постоянном уровне ковариаты

После установления факта различий согласованных на ковариату межгрупповых средних важным представляется выяснить за счёт различий каких именно групп значимым оказался весь эффект. Для этого проводятся запланированные (planned) или незапланированные (post-hoc) сравнения средних в рамках всего комплекса. В целом, тема парных сравнений заслуживает отдельного изложения, поскольку в настоящее время для этого используются большое число методов. Укажем лишь что в настоящее время широко известная процедура построения контрастов по Шеффе (Sheffé) вытесняется процедурой Тьюки-Крамера (Tukey-Kramer), поскольку последняя даёт менее широкие доверительные интервалы. Также перестаёт использоваться процедура Бонферрони в силу её высокой консервативности (благоприятствует нулевой гипотезе).

Для данных нашего примера используем более простой по сравнению с методом Тьюки-Крамера способ построения доверительных интервалов – метод Гэбриела (Gabriel), в котором используется статистика студентизированного модуля (Studentized Maximum Modulus, не путать со студентизированным размахом(!)) (Sokal & Rohlf, 1995). Для малого числа групп он даёт более узкие по сравнению с методом Шеффе доверительные интервалы, а для большого числа групп – более широкие (Wadsworth, 1997).

- Доверительный интервал = $\bar{y}_{k \text{ соглас}} \pm \sqrt{0,5 m_{\alpha[k'; df]} \cdot s_{\bar{y}_{k \text{ соглас}}}}$

где $\bar{y}_{k \text{ соглас}}$ и $s_{\bar{y}_{k \text{ соглас}}}$ – согласованное среднее значение и его стандартная ошибка,
 $k' = \frac{k(k-1)}{2}$, $df = \sum n_i - k - 1$, m_{α} – критическое значение статистики максимального модуля,
 которое можно рассчитать в программно-статистической среде R или взять из готовых таблиц (см. Приложение 1).

Для нашего примера $k' = \frac{6(6-1)}{2} = 15$, $df = 35 - 6 - 1 = 28$. Из таблицы Приложения 1 мы должны выписать соответствующее критическое значение статистики t для 5%-ного уровня значимости ($\alpha = 0,05$). Поскольку точность таблицы не позволяет определить искомое значение для $df = 28$ – интерполируем его графическим методом по четырём соседним точкам. Как видно из рис. 5 с точность до сотых (точность исходной таблицы Приложения 1) оно равно 3,18.

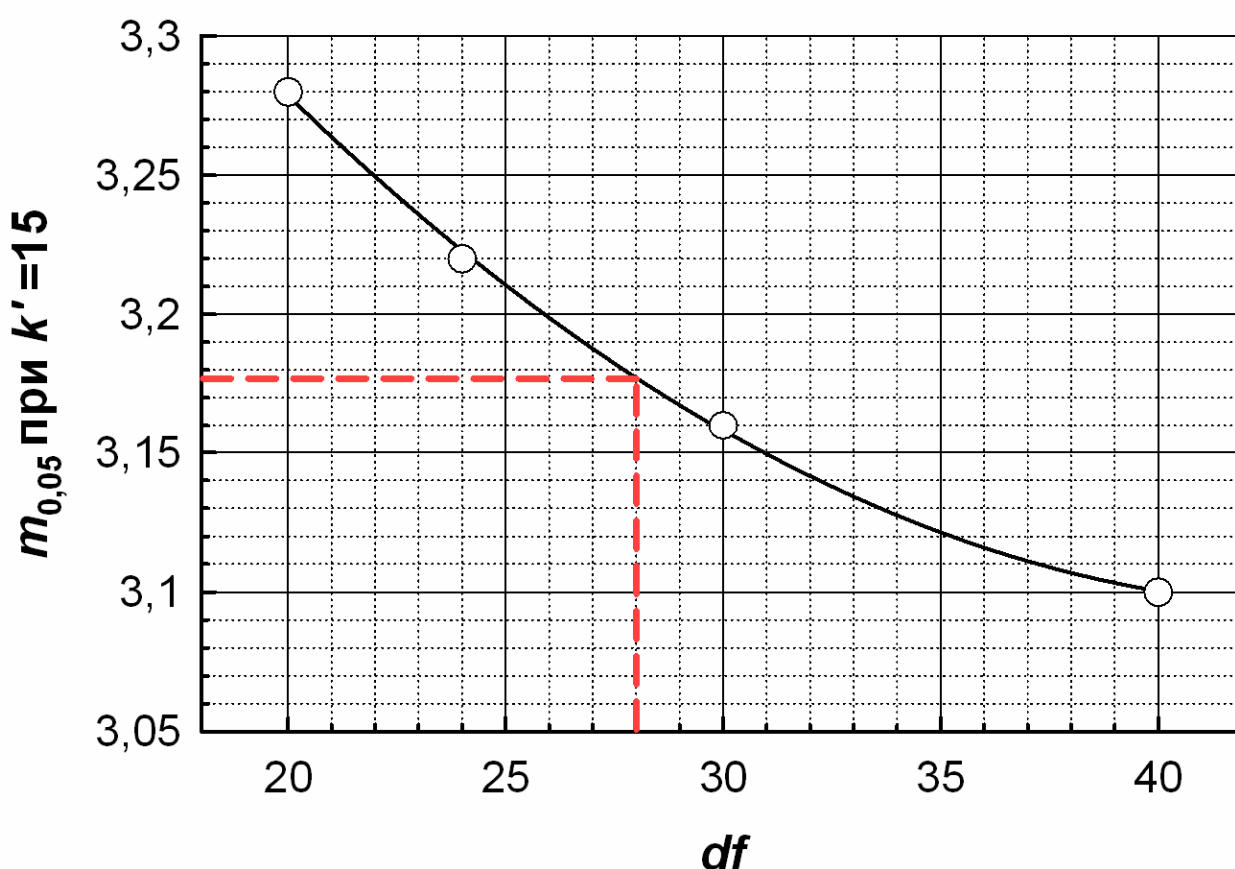


Рис. 5. Графическая интерполяция статистики тьюдентизированного максимального модуля для $\alpha = 0,05$, $k' = 15$ и $df = 28$ полиномом второй степени средствами пакета KyPlot (v.2.15).

Для нашего примера величина $\sqrt{0,5 m_{\alpha[k'; df]}} = \sqrt{0,5 \cdot 3,18} = 1,260952021$.

Тогда 95% ДИ = $\bar{y}_{k \text{ соглас}} \pm 1,260952021 \cdot s_{\bar{y}_{k \text{ соглас}}}$

Например, для первого типа конфет Blue M&M получим:

95% ДИ = $44,65677390 \pm 1,260952021 \cdot 2,75885903 = (41,18; 48,14)$.

Продублируем для удобства расчётов таблицу 10 и снабдим её доверительными интервалами, рассчитанными аналогично для всех типов конфет.

Таблица 12. Согласованные оценки скорости растворения конфет шести типов

Тип конфет	Среднее	Стандартная ошибка	95%-ный ДИ по Гэбриел
Blue M&M	44,65677390	2,75885903	41,18 – 48,14
Button	55,91565202	2,80936172	52,37 – 59,46
Choc Chip	45,25624928	4,02651070	40,18 – 50,33
Red M&M	41,01734694	3,92953062	36,06 – 45,97
Small M&M	23,64708867	3,58534790	19,13 – 28,17
Sno-Cap	31,51512741	3,23954548	27,43 – 35,60

Представим полученные средние значения и 95%-ные ДИ для них на графике и проинтерпретируем его. Если ДИ пересекаются – различия между согласованными средними для данных групп не значимы на 5 %-ном уровне, если не пересекаются – значимы.

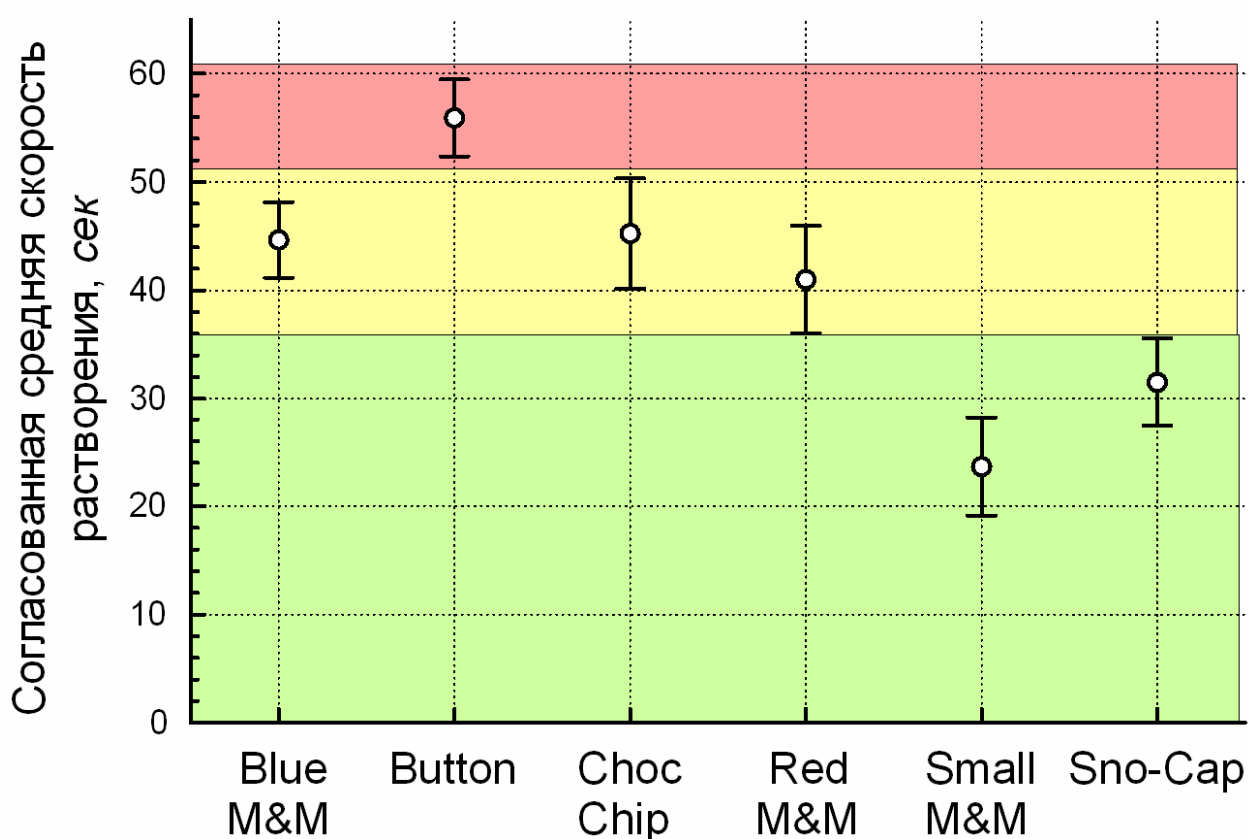


Рис. 6. Средняя скорость растворения во рту шести типов шоколадных конфет, согласованная на индивидуальную скорость потребления сладостей

Интерпретация рис. 6. Из рисунка видно, что существует несколько непересекающихся доверительных интервалов – различия между этими средними и обеспечили статистическую значимость всего ковариационного анализа. Следует отметить, что она проявилась бы даже в случае различий для одной единственной пары значений. Анализ графика позволяет выделить три однородных по скорости растворения типа конфет. Статистически значимо самая высокая скорость была отмечена для конфет Button (красная область); минимальные скорости наблюдались для Small M&M и Sno-Cap (зелёная область), которые значимо выделялись среди других типов конфет, но не отличались между собой. Для Blue M&M,

Choc Chip и Red M&M (жёлтая область) были характерны средние скорости растворения во рту и они не отличались значимо друг от друга. Поскольку Milliken и Johnson (2002) не привели цель эксперимента, возьму на себя смелость предположить её и сформулировать следующую рекомендацию: потребители, полагающие, что настоящий шоколад должен «таять во рту» должны предпочесть конфеты Button, тогда как любители «долгого вкуса» (возможно также опасаящиеся излишнего потребления сладкого или экономящие на сладком) должны выбрать Small M&M и Sno-Cap. Ищущим умеренность во всём можно рекомендовать Blue M&M, Choc Chip или Red M&M.

Вывод по всему анализу в данном случае комбинируется из констатации: линейного характера зависимости признака от ковариаты (этап 1), отсутствия различий наклонов частных регрессий (пункт 5.1), статистически значимых межгрупповых различиях по фактору при постоянном уровне ковариаты (этап 6), обусловленных различиями, выявленными на этапе 7.

Этап 8.

Дискретизация непрерывной ковариаты до качественного предиктора (фактора) с тремя или более градациями

Дискретизация непрерывной ковариаты в градации нового фактора должна проводится с учётом всей имеющейся информации в предметной области. При этом границы для разбиения ковариаты совсем необязательно должны быть одинаковыми – они должны наиболее полно отражать форму нелинейной зависимости. При наличии одного изгиба на кривой обычно достаточно выделить только три градации фактора: с низким, средним и высоким уровнем ковариаты. В случае двух и более изгибов кривой для адекватного отображения её формы потребуется большее число градаций. Однако оно не должно быть слишком высоким – это приведёт к увеличению числа степеней свободы и потере мощности дисперсионного анализа. Т.о. оптимальное число градаций должно быть минимальным, при максимально возможном сохранении отображения формы зависимости.

Литература

- Milliken G.A., Johnson D.E. Analysis of messy data. V.3. Analysis of variance. New York: Chopman & Hall/CRC, 2002. 605 p.
- Sahai H., Ageel M.I. The analysis of variance: fixed, random, and mixed models. Boston: Birkhäuser, 2000. 654 p.
- Sokal R.R., Rohlf F.J. Biometry: the principles and practice of statistics in biological research. N-Y: Freeman & Co, 1995. 850 p.
- Wadsworth H.M. Handbook of statistical methods for engineers and scientists. 2 ed. McGraw-Hill Professional, 1997. 688 p.
- Yoshioka K. KyPlot – a user-oriented tool for statistical data analysis and visualization // Computational Statistics. 2002. V. 17. № 3. P. 425–437.

Приложение 1.

Table XV. Critical Values of the Studentized Maximum Modulus Distribution

This table gives the critical values of the Studentized maximum modulus distribution used in multiple comparisons. The critical values are given for $\alpha = 0.10, 0.05, 0.01$; the number of comparisons $p = 2$ (1) 5; and the error degrees of freedom $\nu = 2$ (1) 12 (2) 20, 24, 30, 40, 60, ∞ . For example, for $\alpha = 0.05$, $p = 3$, and $\nu = 12$, the required critical value is obtained as 2.75.

ν	α	Number of comparisons (p)													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
2	0.10	3.83	4.38	4.77	5.06	5.30	5.50	5.67	5.82	5.96	6.08	6.18	6.28	6.37	6.45
	0.05	5.57	6.34	6.89	7.31	7.65	7.93	8.17	8.38	8.57	8.74	8.89	9.03	9.16	9.28
	0.01	12.73	14.44	15.65	16.59	17.35	17.99	18.53	19.01	19.43	19.81	20.15	20.46	20.75	21.02
3	0.10	2.99	3.37	3.64	3.84	4.01	4.15	4.27	4.38	4.47	4.55	4.63	4.70	4.76	4.82
	0.05	3.96	4.43	4.76	5.02	5.23	5.41	5.56	5.69	5.81	5.92	6.01	6.10	6.18	6.26
	0.01	7.13	7.91	8.48	8.92	9.28	9.58	9.84	10.06	10.27	10.45	10.61	10.76	10.90	11.03
4	0.10	2.66	2.98	3.20	3.37	3.51	3.62	3.72	3.81	3.89	3.96	4.02	4.08	4.13	4.18
	0.05	3.38	3.74	4.00	4.20	4.37	4.50	4.62	4.72	4.82	4.90	4.98	5.04	5.11	5.17
	0.01	5.46	5.99	6.36	6.66	6.90	7.10	7.27	7.43	7.57	7.69	7.80	7.91	8.00	8.09
5	0.10	2.49	2.77	2.96	3.12	3.24	3.34	3.43	3.51	3.58	3.64	3.69	3.75	3.79	3.84
	0.05	3.09	3.40	3.62	3.79	3.93	4.04	4.14	4.23	4.31	4.38	4.45	4.51	4.56	4.61
	0.01	4.70	5.11	5.40	5.63	5.81	5.97	6.11	6.23	6.33	6.43	6.52	6.60	6.67	6.74
6	0.10	2.39	2.64	2.82	2.96	3.07	3.17	3.25	3.32	3.38	3.44	3.49	3.54	3.58	3.62
	0.05	2.92	3.19	3.39	3.54	3.66	3.77	3.86	3.94	4.01	4.07	4.13	4.18	4.23	4.28
	0.01	4.27	4.61	4.86	5.05	5.20	5.33	5.45	5.55	5.64	5.72	5.80	5.86	5.93	5.99
7	0.10	2.31	2.56	2.73	2.86	2.96	3.05	3.13	3.19	3.25	3.31	3.35	3.40	3.44	3.48
	0.05	2.80	3.06	3.24	3.38	3.49	3.59	3.67	3.74	3.80	3.86	3.92	3.96	4.01	4.05
	0.01	4.00	4.30	4.51	4.68	4.81	4.93	5.03	5.12	5.20	5.27	5.33	5.39	5.45	5.50
8	0.10	2.26	2.49	2.66	2.78	2.88	2.97	3.04	3.10	3.16	3.21	3.26	3.30	3.34	3.37
	0.05	2.72	2.96	3.13	3.26	3.36	3.45	3.53	3.60	3.66	3.71	3.76	3.81	3.85	3.89
	0.01	3.81	4.08	4.27	4.42	4.55	4.65	4.74	4.82	4.89	4.96	5.02	5.07	5.12	5.17
9	0.10	2.22	2.45	2.60	2.72	2.82	2.90	2.97	3.03	3.09	3.13	3.18	3.22	3.26	3.29
	0.05	2.66	2.89	3.05	3.17	3.27	3.36	3.43	3.49	3.55	3.60	3.65	3.69	3.73	3.77
	0.01	3.67	3.92	4.10	4.24	4.35	4.45	4.53	4.61	4.67	4.73	4.79	4.84	4.88	4.92
10	0.10	2.19	2.41	2.56	2.68	2.77	2.85	2.92	2.98	3.03	3.08	3.12	3.16	3.20	3.23
	0.05	2.61	2.83	2.98	3.10	3.20	3.28	3.35	3.41	3.47	3.52	3.56	3.60	3.64	3.68
	0.01	3.57	3.80	3.97	4.10	4.20	4.29	4.37	4.44	4.50	4.56	4.61	4.66	4.70	4.74
11	0.10	2.17	2.38	2.53	2.64	2.73	2.81	2.88	2.93	2.98	3.03	3.07	3.11	3.15	3.18
	0.05	2.57	2.78	2.93	3.05	3.14	3.22	3.29	3.35	3.40	3.45	3.49	3.53	3.57	3.60
	0.01	3.48	3.71	3.87	3.99	4.09	4.17	4.25	4.31	4.37	4.42	4.47	4.51	4.55	4.59
12	0.10	2.15	2.36	2.50	2.61	2.70	2.78	2.84	2.90	2.95	2.99	3.03	3.07	3.10	3.14
	0.05	2.54	2.75	2.89	3.00	3.09	3.17	3.24	3.29	3.34	3.39	3.43	3.47	3.51	3.54
	0.01	3.42	3.63	3.78	3.90	4.00	4.08	4.15	4.21	4.26	4.31	4.36	4.40	4.44	4.48
14	0.10	2.12	2.32	2.46	2.57	2.65	2.72	2.79	2.84	2.89	2.93	2.97	3.01	3.04	3.07
	0.05	2.49	2.69	2.83	2.94	3.02	3.09	3.16	3.21	3.26	3.30	3.34	3.38	3.41	3.45
	0.01	3.32	3.52	3.66	3.77	3.85	3.93	3.99	4.05	4.10	4.15	4.19	4.23	4.26	4.30
16	0.10	2.10	2.29	2.43	2.53	2.62	2.69	2.75	2.80	2.85	2.89	2.93	2.96	2.99	3.02
	0.05	2.46	2.65	2.78	2.89	2.97	3.04	3.10	3.15	3.20	3.24	3.28	3.31	3.35	3.38
	0.01	3.25	3.43	3.57	3.67	3.75	3.82	3.88	3.94	3.99	4.03	4.07	4.11	4.14	4.17

ν	α	Number of comparisons (p)													
		2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
18	0.10	2.08	2.27	2.41	2.51	2.59	2.66	2.72	2.77	2.81	2.85	2.89	2.92	2.96	2.99
	0.05	2.43	2.62	2.75	2.85	2.93	3.00	3.05	3.11	3.15	3.19	3.23	3.26	3.29	3.32
	0.01	3.19	3.37	3.50	3.60	3.68	3.74	3.80	3.85	3.90	3.94	3.98	4.01	4.04	4.07
20	0.10	2.07	2.26	2.39	2.49	2.57	2.63	2.69	2.74	2.79	2.83	2.86	2.90	2.93	2.96
	0.05	2.41	2.59	2.72	2.82	2.90	2.96	3.02	3.07	3.11	3.15	3.19	3.22	3.25	3.28
	0.01	3.15	3.32	3.45	3.54	3.62	3.68	3.74	3.79	3.83	3.87	3.91	3.94	3.97	4.00
24	0.10	2.05	2.23	2.36	2.46	2.53	2.60	2.66	2.70	2.75	2.79	2.82	2.85	2.88	2.91
	0.05	2.38	2.56	2.68	2.77	2.85	2.91	2.97	3.02	3.06	3.10	3.13	3.16	3.19	3.22
	0.01	3.09	3.25	3.37	3.46	3.53	3.59	3.64	3.69	3.73	3.77	3.80	3.83	3.86	3.89
30	0.10	2.03	2.21	2.33	2.43	2.50	2.57	2.62	2.67	2.71	2.75	2.78	2.81	2.84	2.87
	0.05	2.35	2.52	2.64	2.73	2.80	2.87	2.92	2.96	3.00	3.04	3.07	3.11	3.13	3.16
	0.01	3.03	3.18	3.29	3.38	3.45	3.51	3.55	3.60	3.64	3.67	3.70	3.73	3.76	3.78
40	0.10	2.01	2.18	2.30	2.40	2.47	2.53	2.58	2.63	2.67	2.71	2.74	2.77	2.80	2.82
	0.05	2.32	2.49	2.60	2.69	2.76	2.82	2.87	2.91	2.95	2.99	3.02	3.05	3.08	3.10
	0.01	2.97	3.12	3.22	3.30	3.37	3.42	3.47	3.51	3.54	3.58	3.61	3.63	3.66	3.68
60	0.10	1.99	2.16	2.28	2.37	2.44	2.50	2.55	2.59	2.63	2.67	2.70	2.73	2.76	2.78
	0.05	2.29	2.45	2.56	2.65	2.72	2.77	2.82	2.86	2.90	2.93	2.96	2.99	3.02	3.04
	0.01	2.91	3.05	3.15	3.23	3.29	3.34	3.38	3.42	3.46	3.49	3.51	3.54	3.56	3.59
∞	0.10	1.95	2.11	2.23	2.31	2.38	2.43	2.48	2.52	2.56	2.59	2.62	2.65	2.67	2.70
	0.05	2.24	2.39	2.49	2.57	2.63	2.68	2.73	2.77	2.80	2.83	2.86	2.88	2.91	2.93
	0.01	2.81	2.93	3.02	3.09	3.14	3.19	3.23	3.26	3.29	3.32	3.34	3.36	3.38	3.40

From R. E. Bechhofer and C. W. Dunnett, "Comparisons for Orthogonal Contrasts: Examples and Tables," *Technometrics*, 24 (1982), 213–222.